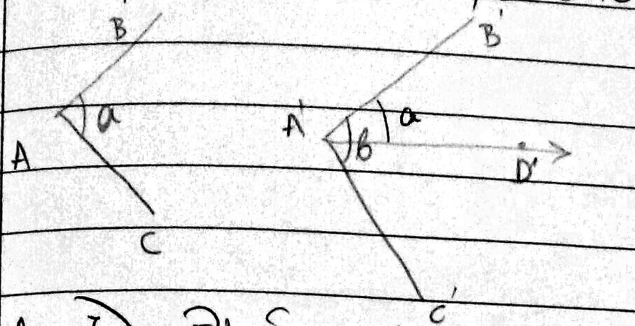
Έστω μια γωνία $B\hat{A}C = \hat{\alpha}$, $\hat{\beta} = B'\hat{A}'C'$



Από I_4), $\exists$ μοναδική ~~...~~ ημιευθεία $\overrightarrow{A'D'}$, όπου $D' \underset{A'B'}{\sim} C'$.

Θδο 1 και μόνο 1 απ' αυτές ισχύει: $\hat{\alpha} < \hat{\beta}$, $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\beta} < \hat{\alpha}$

Απόδειξη

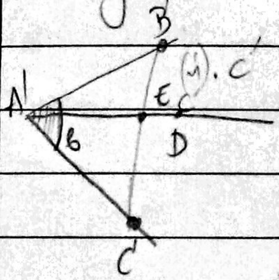
i) D' στο εσωτερικό της $\hat{\beta} = B'\hat{A'}C'$ $\overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}$ $\hat{\alpha} < \hat{\beta}$ ①

ii) C' στο εσωτερικό της $\hat{\alpha} = B'\hat{A'}D'$ $\Rightarrow$ $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ ② } Δεν ισχύουν ταυτόχρονα (*)

iii) $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'D'}$ $\Rightarrow$ $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ③

1ο βήμα

(*) Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ① κ' ② ισχύουν ταυτόχρονα



① Από γνωστό θεώρημα: $\exists$ σημείο E : $B' * E * C'$

$\overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{A'D'}$

$B'\hat{A'}E = \hat{\alpha}$

② Αν ισχύει και αυτή, δηλ. C' στο εσωτερικό της $\hat{\alpha}$ $\Rightarrow$ {

$\Rightarrow \begin{cases} D' \underset{A'B'}{\sim} C' \\ C' \underset{A'B'}{\sim} B' \end{cases}$

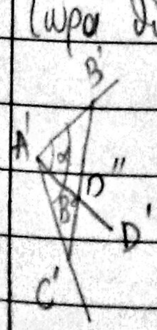
Αναγκαστικά, από τη $B' * E * C' \Rightarrow B' \not\sim C'$ όμως το E είναι το μόνο κοινό σημείο τομής της $B'C'$ κ' AD $\Rightarrow B'C' \cap (A'D') \neq \emptyset \Rightarrow B' \underset{A'B'}{\not\sim} C'$, αντίφαση

$\{E\}$

Τώρα θδο ισχύει τουλάχιστον ένα από τα 3. Ας υποθέσουμε ότι $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ όχι

$\hat{\alpha} < \hat{\beta}$ όχι ②'

$\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ όχι ③'



②' $\Rightarrow$ D' όχι στο εσωτερικό της $\hat{\beta}$

$D' \underset{A'B'}{\sim} C' \Rightarrow D' \underset{A'C'}{\not\sim} B'$ ⑤

③' $\Rightarrow$ C' όχι στο εσωτερικό της $\hat{\alpha}$ $\quad C' \underset{AD}{\not\sim} B'$ ⑥

⑥ $\Rightarrow \overline{C'B'} \cap (A'D') \neq \emptyset$

"$\{D''\}$"

$C' * D'' * B'$. Αν δείξουμε ότι $\boxed{D'' \sim_{A'} D'}$ $(\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'D''})$

$\Longleftrightarrow$ ↳ $\hat{\alpha} = B'\hat{A'}D''$

$\Rightarrow \hat{\alpha} < \hat{\beta}$

$\Rightarrow \boxed{D'' \sim_{A'B'} D'}$

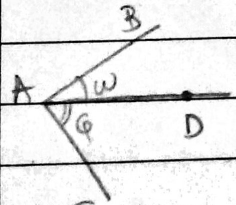
Θέλουμε ν.δ.ο. $D'' \sim_{A'B'} D'$

$D'' \sim_{A'B'} C'$ (?) $\left[D'' \sim_{B'} C' \to D'' \sim_{A'B'} C' \right]$

$D' \sim_{A'B'} C'$ φανερό από υπόθεση. □

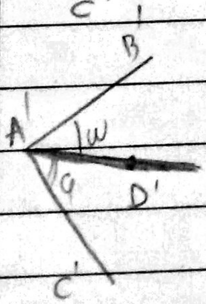
Πρόσθεση γωνιών

Θεώρημα (Πρόσθεση γωνιών). Δίνονται οι γωνίες $B\hat{A}C$, $B'\hat{A'}C'$, όπου $\overrightarrow{AD}$ στο εσωτερικό της $B\hat{A}C$. Σχηματίζοντας δύο γωνίες $(\hat{\omega}, \hat{\varphi})$. Θεωρούμε D' σημείο, τ.ω. $B' \not\sim_{A'D'} C'$. Τα B', C' σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς $(A'D')$. Επίσης $B'\hat{A'}C' = \omega$ & $D'\hat{A'}C' = \varphi$. Τότε $B'\hat{A'}C'$ εκφράζει την $B\hat{A}C$.



Δηλαδή, καταλήγουμε ότι ① $\overrightarrow{A'D'}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $B'\hat{A'}C'$ &

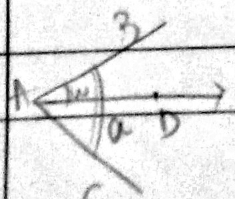
② $B'\hat{A'}C' = B\hat{A}C \ (\equiv \hat{\omega} + \hat{\varphi})$

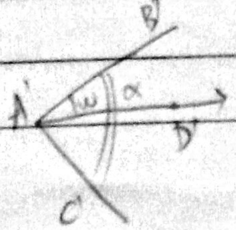


Απόδειξη (βλ. σημειώσεις) H/W

Διαφορά γωνιών

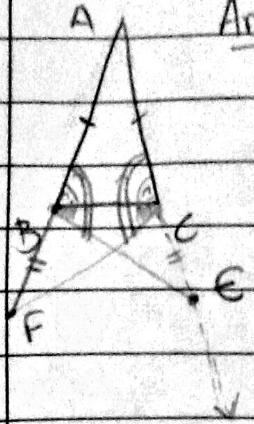
Θεώρημα. Δίνονται γωνίες $B\hat{A}C$, $B'\hat{A'}C'$ ίσες μεταξύ τους, τ.ω. $(B\hat{A}C = B'\hat{A'}C' = \alpha)$. D εσωτερικό της $B\hat{A}C$, σχηματίζοντας την $\hat{\omega}$ (βλ. σχήμα) με $\hat{\omega} < \hat{\alpha}$. Τότε $\exists$ μοναδικό σημείο D' στο εσωτερικό της $B'\hat{A'}C'$, ώστε $B'\hat{A'}D' = \hat{\omega} = B\hat{A}D$ και επιπλέον $D'\hat{A'}C' = D\hat{A}C = \hat{\alpha} - \hat{\omega}$





(+) Η προσθεση κ η διαφορα ειναι καλα ορισμενη πραξη.

② **Προταση**: Εστω $\overset{\triangle}{ABC}$ ισοσκελες, δηλ $AB = AC$, τοτε $\hat{B} = \hat{C}$



Αποδειξη:

(AB) ευθεια

Θεωρουμε τυχον σημειο F στην αντιθετη ημιευθεια του A ως προς B, δηλ $A * B * F$

Κατασκευαζουμε την $\vec{AC}$, $\exists!$ σημειο $E \in \vec{AC}$, τ.ω $AE = AF$

Απο τα διαφ. ευθ. τμηματων εχουμε οτι: $BF = CE$

1ο) Θδο $A\hat{B}E = A\hat{C}F$ (προφανως αφου $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{ACF}$ (κοινη γωνια, κοινη πλευρα, $AB = AC$)

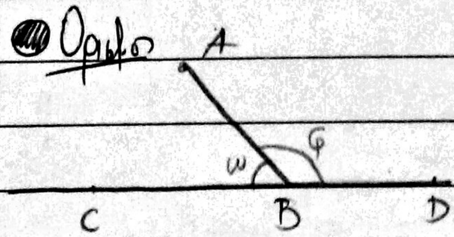
2ο) Θδο $F\hat{C}B = C\hat{B}E$ (προφανως αφου $\overset{\triangle}{FBC} = \overset{\triangle}{EBC}$ γιατι $BF = CE$, $[BC$ κοινη$]$, $A\hat{F}C = A\hat{E}B$ απο το 1ο) $\Rightarrow BE = FC$

Αρα $F\overset{\triangle}{B}C = C\overset{\triangle}{B}E$ κ $C\hat{B}E = F\hat{C}B$

οποτε $\hat{B} = \hat{C}$, ως διαφορα γωνιων

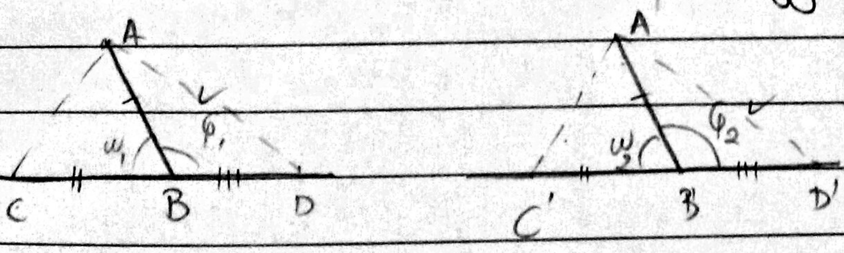
Αντιστροφα, αν στο $\overset{\triangle}{ABC}$, $\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow AB = AC$ ← Θδο στον επομενο φορα!

③ **Ορισμος**



Με δεδομενο το σχημα:
$\hat{\omega}, \hat{\varphi}$ θα λεγονται παραπληρωματικες

④ **Αξιωμα/Προταση**: Απο τα στοιχεια που πηραμε απο τα σχηματα Νδο
$\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$



Λυση:

Μεταφερουμε το BA στην ημιευθεια $\vec{B'A'}$ (I_1) και απο υποθεση εχω οτι $B'A' = BA$

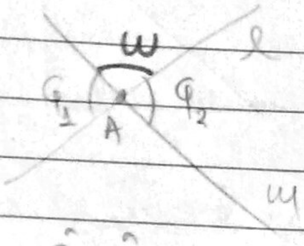
Προφανως $B'C' = BC$, BD, $B'C'$

Συγκρινω κ καταληγω απο το 1ο κριτηριο οτι $\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{A'B'D'} \Rightarrow C'\hat{D}'A' = C\hat{D}A$

& $AD = A'D'$ / $\left.\begin{matrix} C * B * D \\ C' * B' * D' \end{matrix}\right\}$ υπο (I_3) $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} CD = C'D' \\ \hat{D} = \hat{D}' \\ AD = A'D' \end{matrix}\right\} \Rightarrow C\hat{A}D = C'\hat{A}'D'$

κ' ορίζοντας τα $A\hat{B}C$ κ' $A'\hat{B'}C'$ θα έχω ότι $A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$
κ' επομένως $\omega_1=\omega_2$ /

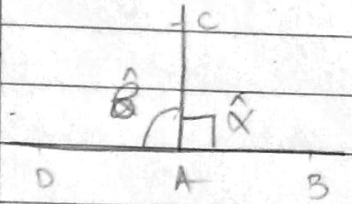
(iii) Άσκηση



$l \neq \omega$
$l \cap \omega = \{A\}$
$\varphi_1 \overset{?}{=} \varphi_2$

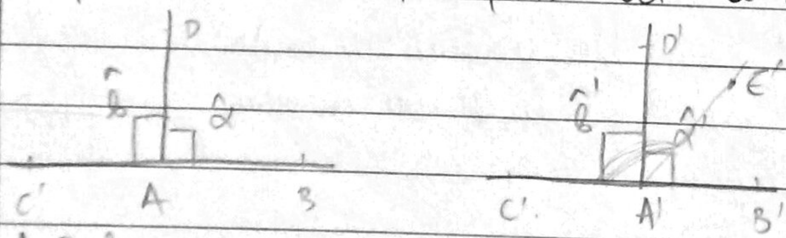
$\hat{\varphi}_1=\hat{\varphi}_2$, ως παραπληρωματικές ίδιας γωνίας της ω

(iv) Ορισμός: Δίνεται γωνία $\hat{a}$ και η παραπληρωματική της. Αν η $\hat{a}$ είναι ίση με την παραπληρωματική της, θα λέμε ότι $\hat{a}$: ορθή γωνία.



Δηλ. $\hat{a} = \hat{b}$

(v) Πρόταση: Έστω $\hat{a}, \hat{a}'$ ορθές. Τότε $\hat{a}=\hat{a}'$ (1)



Απόδειξη:
Έστω ότι η (1) δεν ισχύει. είτε $\hat{a}'>\hat{a}$ είτε $\hat{a}>\hat{a}'$
Έστω ότι $\hat{a}'>\hat{a}$. Τότε ∃! εσωτερική ημιευθεία $A'E'$ της $\hat{a}'$ τ.ω
$B'\hat{A'}E'=\hat{a}$
Παρατηρούμε ότι D' εσωτερικό σημείο $C'\hat{A'}E'$
Αρκεί νδο $D' \sim_{A'C'} E'$ & $D' \sim_{A'E'} C'$ (4)
(3): φανερό διότι (3) E' στο εσωτερικό της $D'\hat{A'}B'$ ⇒ $\begin{cases} E' \sim_{A'B'} D' \Rightarrow (3)\ (A'B') = (A'C') \\ E' \sim_{A'D'} B' \end{cases}$

(4) θδο $D' \sim_{A'E'} C'$
Εφόσον $\overrightarrow{A'E'}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $B'\hat{A'}D'$ ⇒

$\Rightarrow \boxed{B' \underset{A'E'}{\sim} D'}$ Όμως $C' * A' * B' \to C' \underset{A'}{\not\sim} B' \to \boxed{C' \underset{A'E'}{\not\sim} B'}$

$\Rightarrow$ προκύπτει ότι $D' \underset{A'E'}{\not\sim} C'$ (4) ✓

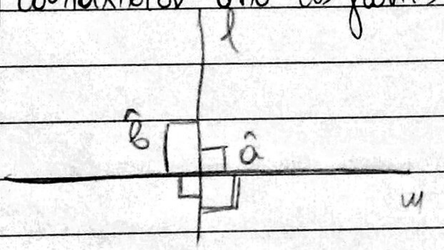
$D'\hat{A}'C' < C'\hat{A}'E'$

$\hat{b}'$ $\hat{b}$ σαν παραπληρωματικές της γωνίας $\hat{a}$

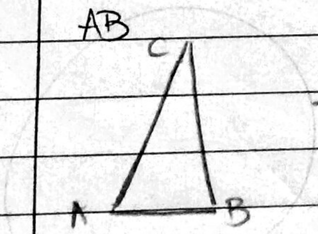
$\Rightarrow \hat{b}' < \hat{b}$

$\boxed{\hat{a}' < \hat{a}}$ ΑΤΟΠΟ

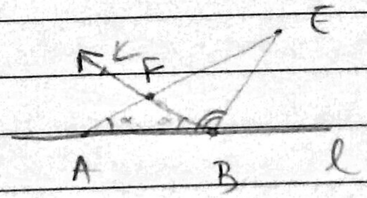
(10) Ορισμός: Οι ευθείες l, m θα λέμε ότι είναι κάθετες, αν τέμνονται και μια τουλάχιστον από τις γωνίες που σχηματίζουν είναι ∟



(11) Πρόταση: Δοθέντος ευθύγραμμου τμήματος $\overline{AB}$, ∃ ισοσκελές τρίγωνο με βάση AB



Απόδειξη



Θεωρούμε $E \notin l \Rightarrow E, A, B$ μη συνευθειακά $\Rightarrow$ ορίζεται το $\overset{\triangle}{ABE}$

Αν $E\hat{A}B = E\hat{B}A \Rightarrow E\hat{A}B$ ισοσκελές

Αν όχι $\Rightarrow E\hat{B}A > E\hat{A}B$ Μεταφέρουμε τη $\hat{\alpha} = E\hat{A}B$ στην κορυφή B, και με πλευρά της πάνω στην $\overrightarrow{BA}$. Είδαμε $\hat{a} < A\hat{B}E$

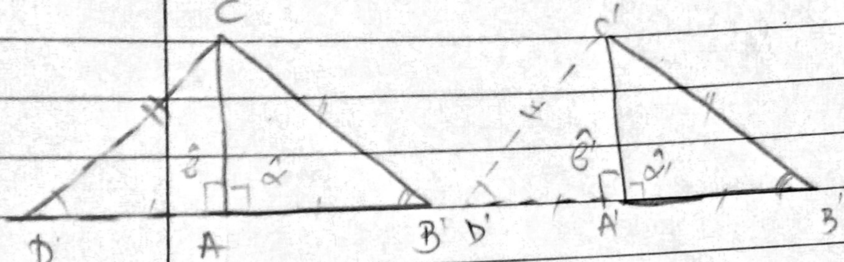
(προκύπτει η γωνία $A\hat{B}K$)

θα έχουμε $\overrightarrow{AK}$ στο εσωτερικό της $A\hat{B}E \xRightarrow{\theta.} \overrightarrow{AK} \cap \overline{AE} = \{F\}$

F στο εσωτερικό AE. Άρα $A\hat{B}F$ (τρίγωνο - έλεγχος μη συνευθειακά (4/4))

Προφανώς ισοσκελές.

Άσκηση (1) Θεωρούμε τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABC}$ & $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ κι' $BC = B'C'$, $AB = A'B'$
κι $B\hat{A}C = 1L = C'A'B'$ ΝΔΟ τα τρίγωνα είναι ίσα



Δημιουργούμε ένα συμμετρικό τρίγωνο το $\overset{\triangle}{DCA}$, όπου

$$\left.\begin{array}{l} AD = AB \\ \hat{\alpha} = \hat{\beta} = 1L \\ AC \text{ κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ίσα άρα} \\ CD = CB \\ \hat{D} = \hat{B} \end{array}$$

Αντίστοιχα κι για το άλλο τρίγωνο.

$\hat{B} = \hat{B}'$ (?) $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

(?) Απόδειξη: $\overset{\triangle}{DBC} = \overset{\triangle}{D'B'C'}$ (με πλευρές ίσες) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$

/θα αποδειχθεί στο μέλλον/